

Жанузакова Динара Таупиховнаның
«6D060100 – Математика» мамандығы бойынша
философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін дайындаған
«Фильтрация теориясының тура және кері есептерін жуықтап шешу
әдістері» тақырыбындағы диссертациясына

АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Бұл диссертациялық жұмыс фильтрация теориясында туындайтын кейбір математикалық модельдер үшін қойылған тура және кері есептерді зерттеуге арналған, яғни фазалық ауысуды ескеретін фильтрация теориясының математикалық моделі, псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебі, параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебі, реакция-диффузия есебі қарастырылады. Осы типтегі теңдеулер және Соболев типті жалпы теңдеулер фильтрация теориясында жылу және масса алмасу процестерін сипаттауда, жер-топырақтағы ылғал тасымалдауда, плазма физикасында, популяцияда және көптеген басқа салаларда пайда болады

Диссертациялық жұмыстың мақсаттары. Фильтрация теориясының тура және кері есептерін шешімділікке зерттеу. Атап айтқанда:

-Стефан типті есептің математикалық моделінің қисындылығын, шешімнің бар болуының, жалғыздығын, релаксация уақыты бойынша шекке көшуін зерттеу.

-Сызықтық емес шекаралық шартымен берілген квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептердің бірімәнді шешімділікке зерттеу. Есептердің әлсіз жалпыланған шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеу, сызықтық емес шекаралық шарты бар квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін есептің шешімінің қирауын дәлелдеу және уақыт бойынша шешімнің асимптотикалық тұрпатын зерттеу.

-Квазисызықты параболалық теңдеу үшін қойылған кері есептің әлсіз шешімін табу, шешімнің орнықтылығын зерттеу, сонымен қатар шешімнің ақырлы уақытта қирауын дәлелдеу.

-Сызықты емес айқас-диффузиясы бар бәсекелестік жүйенің бір фазалы және екі фазалы паттерндар үшін құрылған шешімдерін табу теоремасын дәлелдеу. Шешімдердің нақты аймақтарын табу.

Диссертацияның ғылыми жаңалығы. Диссертацияда алынған барлық нәтижелер жаңа және қатаң дәлелі бар. Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңызы бар және оларды тура және кері есептердің жалпы теориясын құруда пайдалануға болады.

- Фазалық релаксациясы бар Стефан типті фильтрация теориясының бір моделінің шешімінің бар болуы, жалғыздығы алынды. Релаксация уақыты бойынша шекке көшу леммасы дәлелденді. Сандық тәжірибелер ұсынылды.

-Нейман-Дирихле типті сызықты емес шекаралық шарты бар псевдопараболалық типті квазисызықты теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің жалпыланған әлсіз шешімінің бар болу және жалғыздығы туралы теоремасы дәлелденді. Сонымен қатар, шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды.

- Қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар квазисызықты параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебінің әлсіз шешімінің бар болуы Галеркин әдісімен дәлелденді және шешімнің тұрақтылығы алынды.

- Сызықты емес айқас диффузиялы бәсекелестік жүйенің кейбір параметрлер диапазоны үшін периодты стационарлық шешімдердің екі түрлі түрі бар екенін көрсетілді. Сегіз өлшемді параметр кеңістігін бөліктерге бөліп және шешімдердің Тьюринг аймақтары көрсетілді. Аналитикалық әдістермен қатар шешімдердің қасиеттерін зерттеудегі сандық әдістері ұсынылды.

Зерттеу әдісі. Зерттеу нәтижелеріне қол жеткізу барысында Галеркиннің жуықтау әдісі, априорлық бағалау әдісі, Соболев кеңістігінің теориясы, интегралдық және дифференциалдық есептеу әдістері, функционалдық талдау әдісі, компактлік әдісі, монотондылық әдісі, қажетті интерполяциялық теңсіздіктер, Юнг, Геллер және Минковский теңсіздіктері қолданылды.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңызы. Алынған нәтижелер теориялық және практикалық маңызға ие және алынған нәтижелер ең алдымен теориялық қызығушылық тудырады. Зерттеудің қол жеткізілген нәтижелері үшін есептеу эксперименттерін жүргізуге және шешімдердің сандық мәндерін алуға болады.

Жарияланымдар. Диссертациялық зерттеу нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

– Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес төртінші және бірінші квартильдерге (Q4 және Q1) енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore пайыздық көрсеткіштері сәйкесінше 35, 91, 96 [97, 98] болатын ғылыми журналдардағы 3 мақала:

1. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. Behavior of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. -2019. –Vol. 16. –P.1366-1382. DOI 10.33048/SEMI.2019.16.097 (Scopus: процентиль – 35%, Web of Science: Q4, SJR – 0.516).

2. Aitzhanov S.E., Zhanuzakova D.T. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. DOI 10.1002/mma.8568 (Scopus: процентиль – 91%, Web of Science: Q1, SJR – 0.702).

3. Kersner R., Klincsik M., Zhanuzakova D.T. A competition system with nonlinear cross-diffusion: exact periodic patterns//Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales-Serie A: Matemáticas. 2022. DOI 10.1007/s13398-022-01299-1 (Scopus: процентиль – 96%, Web of Science: Q1, SJR – 1.055).

–ҚР БҒМ Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда 3 мақала.

1. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью // Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ, 63, #3, 2018.

2. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения//ҚазҰТУ хабаршысы; Техникалық ғылымдар сериясы, 3, #133, 2019.

3. Мухамбетжанов С.Т., Жанузакова Д.Т. О корректности одной модели теории фильтрации типа Стефана//Хабаршы, Абай атындағы ҚазҰПУ, 65#1, 2019

– халықаралық конференциялар жинағында 7 жарияланым:

1.Обоснование метода фиктивных областей для модели Маскета-Левретта// Ибрашев Хасан Ибрашұлының 100 жылдығына арналған «Қазақстандағы математика – өткені мен болашағы» атты халықаралық ғылыми-әдістемелік конференция, 2016

2.On the Application of Quasi-Conformal Mappings to Solve the Problem of Filtration Theory//The 5th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, 2017

3. About One Problem of the Isothermal Filtration Process//The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and its Applications, 2017

4. On the Development of a Mathematical Model of Nonequilibrium Filtration //The 7th Abu Dhabi University Annual International Conference Mathematical Science and Its Applications, 9-12 May 2018

5.Разрушение решений обратной задачи для параболического уравнения со степенной нелинейностью// Анализдің, дифференциалдық тендеулердің және алгебраның өзекті мәселелері, 2019

6. Correctness of a one mathematical model of nonequilibrium phase transitions of water in porous media// «Дифференциалдық тендеулер, анализ және алгебра мәселелері» атты VIII халықаралық ғылыми конференция, 1.11. 2018

7. An initial boundary value problem for a pseudoparabolic equation with a nonlinear boundary condition// Жаратылыстанудың кері және қисынды емес есептері атты Халықаралық ғылыми конференциясының материалдары, 11-12 сәуір, 2023

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, 5 бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерге бөлінген), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыста 8 сурет бар. Диссертацияның көлемі 105 бет.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Ұсынылған диссертацияның кіріспесінде жұмыстың өзектілігі мен жаңалығы берілген, жұмыстың мақсаты тұжырымдалды, негізгі ережелері белгіленіп, сонымен қатар диссертацияның қысқаша мазмұны берілген.

Бірінші тарауда қажетті белгілеулер енгізіліп, қажетті анықтамалар,

белгілі леммалар, теоремалар, негізгі теңсіздіктер келтіріледі.

Екінші тарауда фазалық ауысуды ескеретін фильтрация теориясының математикалық моделі қарастырылған:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (H(c) - s), \\ m \cdot \frac{\partial c}{\partial t} &= D \cdot \Delta c - v \cdot \nabla c - \frac{\partial s}{\partial t}. \end{aligned}$$

Фазалық релаксациясы бар бұл математикалық моделді қанағаттандыратын $c(x, t)$, $s(x, t)$ (сұйық және қатты фазалардағы ББЗ концентрациясы) функцияларын табу қарастырылған. Бұл моделдің қисындылығы тексерілді. Шешімнің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді. Сандық тәжірибелер келтірілді.

Үшінші тарау газдалған сұйықтық есебінің шешімінің сапалық қасиетін зерттеуге арналған. Шекарасы жеткілікті тегіс шенелген аймақтағы псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебінің шешімділігін зерттеудің іргелі мәселесі қарастырылады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u - \chi \Delta u) - (a_0 + a_1 \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2q-2}) \Delta u &= b(x, t) |u|^{p-2} u + f(x, t) \quad (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + k(x, t) |u|^{\sigma-2} u|_{\Gamma} &= 0, \quad \Gamma = \partial \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Бұл тарауда Галеркин әдісі арқылы шенелген аймақтағы псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің әлсіз шешімінің бар екендігі дәлелденді. Соболевтің енгізу теоремалары арқылы шешімнің априорлы бағалаулары алынды. Априорлық бағалаулар негізінде квазисызықты псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептің жалпыланған әлсіз шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы локальді теоремасы дәлелденген. Шектеулі аймақтағы сызықтық емес шекаралық шартымен берілген Нейман-Дирихле есебінің шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынған.

Төртінші тарауда $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ цилиндрінде қайта анықтау арқылы берілген интегралдық шарты бар дәрежесіне қатысты сызықты емес параболалық типті теңдеуге қойылған кері есебі қарастырылады:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u + a_0 |u|^{p-2} u) - \Delta u + a(x, t, u, \nabla u) &= |u|^{p-2} u + f(t)w(x), \\ x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0,$$

$$\int_{\Omega} (u + a_0 |u|^{p-2}u)\omega dx = \varphi(t), \quad 0 < t < T.$$

Бұл екінші ретті квазисызықты параболалық типті кері есебін қанағаттандыратын $(u(x, t), f(t))$ функциялар жұбын анықтау қарастырылады. Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы Галеркин әдісімен дәлелденген. Біртекті Дирихле шарты бар шенелген аймақта шешімнің ақырлы уақытта қирауы үшін жеткілікті шарттар алынды, сонымен қатар, дәрежелік типіне қатысты сызықты емес қарама-қарсы таңбалы кері есептің шешімінің тұрақтылығы алынды.

Бесінші тарауда сызықты емес кросс-диффузиясы бар бәсекелестік жүйесін қарастырылған:

$$\begin{cases} u_t = (uu_x + \varepsilon_1 uv_x + \varepsilon_3 vu_x)_x + u(1 - u - cv) := -\frac{\partial}{\partial x} J_1 + u(1 - u - cv), \\ v_t = (dvv_x + \varepsilon_4 uv_x + \varepsilon_2 vu_x)_x + v(a - bu - v) := -\frac{\partial}{\partial x} J_2 + v(a - bu - v). \end{cases}$$

Екі түрлі реакция-диффузия (РД) жүйесі зерттелген. Кейбір параметрлер диапазоны үшін периодты стационарлық шешімдердің екі түрлі түрі бар екенін көрсетілген. Сегіз өлшемді параметр кеңістігін бөліктерге бөліп шешімдері бар Тьюринг аймақтары көрсеткен. Шешімдердің бастапқы функциялар кеңістігінде үлкен тартылыс облысы бар аттракторлар (тартушылар) екендігін орынды ететін кейбір сандық есептеулер көрсетілген.